INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES

POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http ://www.iheb.org/

Concours Général de Physiques
“Minko Balkanski”

20 mai 2006

Les deux problèmes sont entièrement indépendants et peuvent être traités dans n’importe quel ordre.
La clarté, la qualité et la précision de la rédaction, qui doit être obligatoirement en ***français***, feront une part ***très importante*** de la note finale.
La durée de la composition est de ***4 heures***.

Problème1 : La vision de l’homme

L’œil humain est composé dans une première approximation d’une lentille et d’un détecteur (rétine) comme montré sur la figure 1. La taille de l’œil humain et d’environ D=24mm de diamètre.

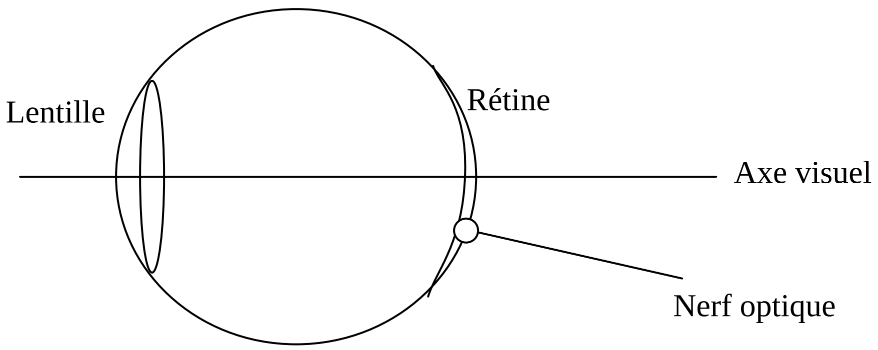

Figure 1

Le détecteur est formé de deux types de petites cellules appelé cônes et bâtonnets. Les cônes sont présents surtout dans le centre de l’axe visuel tendis que les bâtonnets sont présents dans une zone plus large et leur concentration est maximale à 20° de l’axe optique. La figure 2 montre la répartition des cônes et des bâtonnets sur la rétine.

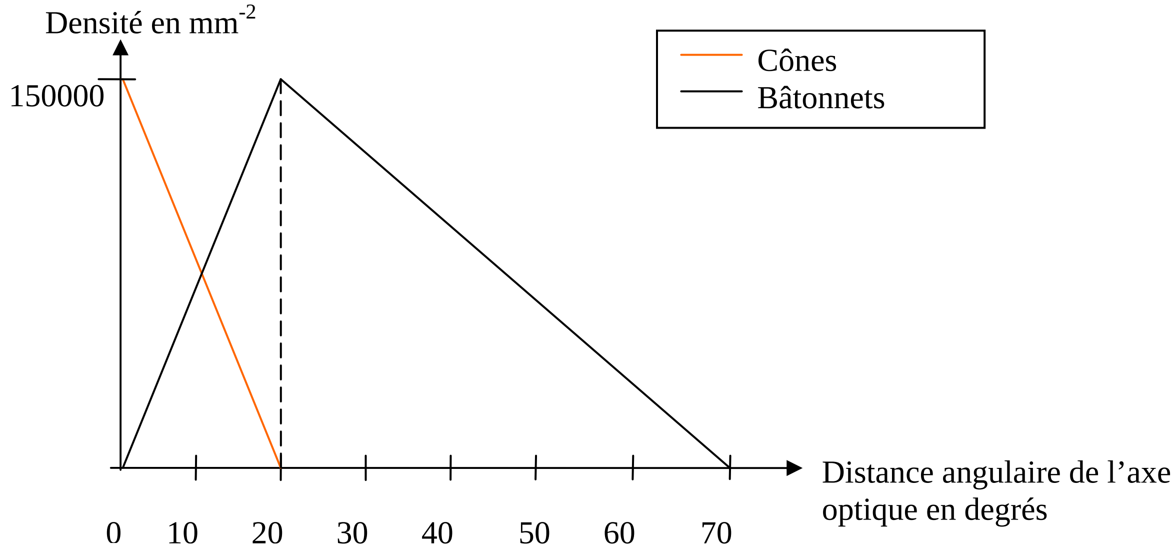

Figure 2

Les cônes sont responsable pour la vision clair tendis que les bâtonnets sont responsables pour la vision périphérique.

Partie 1 : Dans cette partie on considère uniquement des cônes. Pour modéliser cette partie on suppose que la rétine est plate et qu'elle situé à D de la lentille.

1. Quelle doit être la puissance focale de la lentille pour qu'un objet situé à l'infini soit focalisé sur la rétine.
2. On suppose qu'on pose un objet à une distance de 1m.
   a. Quelle doit être la focale de la lentille pour que l'objet soit net sur la rétine
   b. Quelle est la taille maximale de l'objet pour qu'on le voie en vison claire.
3. Chez une personne myope la lentille focalise un objet situé à 3m de l'œil à 1 mm devant la rétine.
   a. On corrige ce défaut par des lunettes. La distance œil lunettes est 1cm. Quelle doit être la focale de la lentille de la lunette
   b. On corrige le défaut par une lentille de contacte. Quelle doit être la focale de la lentille de contacte.
4. On suppose que la densité des cônes est égale à la densité moyenne des cônes dans la zone de vision claire.
   a. Quelle est la taille d'un cône
   b. Quelles est la taille minimale visible de l'objet
   c. Quelle est la distance minimale entre deux points situés à 1m d'un œil sans défauts pour qu'on puisse les voir séparés
   d. Quelle est la résolution angulaire de l'œil en vison claire.

Partie 2 : Dans cette partie ne suppose plus que la rétine n'est plus plate et on considère une rétine sphérique. De plus on prend en compte la réponse des cônes et des bâtonnets. On rappelle que la surface d'une portion de sphère est donnée par la formule $S = \Omega R^2$ avec $\Omega = 2\pi(1-\cos\theta)$ où Ω est l'angle solide et θ est l'angle montré sur la figure 3. On suppose en plus que pendant le jour deux bâtonnets sont nécessaires pour donner la même sensibilité qu'un cône.

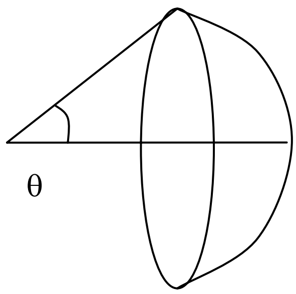

Figure 3

1. Donner la résolution angulaire de l’œil dans la zone de vison claire en fonction de l’angle d’incidence de la lumière.
2. Calculer la résolution angulaire de l’œil sur toute la rétine en fonction de l’angle d’incidence de la lumière. Que se passe-t-il quand un objet s’éloigne de l’axe visuel ?

Problème 2 : La circulation sanguine

Dans cette partie du problème, on s'intéresse à la circulation sanguine dans les artères. On modélise une artère par un tuyau de rayon r et de longueur l. Ce conduit est traversé par un flux Q. Lorsque le flux traverse le conduit, le fluide subit une force de frottement visqueux de la part de la paroi. Cette force est responsable d'une chute de pression ΔP entre les deux extrémités de l'artère.

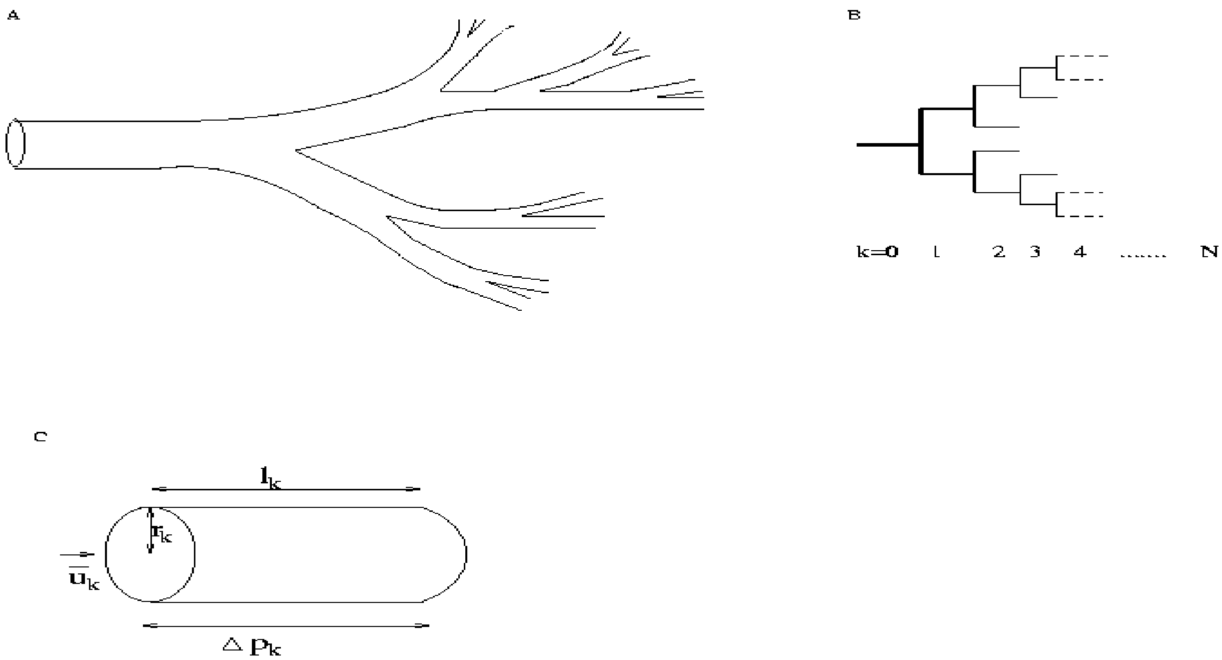

Figure 4. ***A.*** *Représentation schématique du réseau circulatoire des mammifères, composé de conduits branchés,* ***B.*** *Représentation topographique de ce réseau, k spécifie l'ordre de branchement, commençant par l'aorte (k=0) et terminant par les capillaires (k=N),*
C. *Paramètres d'un conduit typique d'ordre k*

On peut montrer qu'il existe une équivalence entre ce circuit hydrodynamique et un circuit électrique à condition d'associer un courant I au débit Q, une tension U à la chute de pression ΔP et une résistance R à l'effet de la force visqueuse.

1. Écrire la loi d'Ohm pour une artère.
2. Déterminer la puissance fournie par le cœur. On prendra Q = 5 l/min, chute de pression dans la circulation systémique ΔP = 100 mmHg.

   On considère un réseau d'artères, chaque artère de l'ordre k se divise en n_k artères d'ordre $k+1$, et de diamètre plus petit celui de l'artère dont elles sont issues. L'aorte désignera l'artère d'ordre 0, les ramifications les plus petites, c'est-à-dire la dernière génération d'artères seront désignées de capillaires. Une artère typique d'un niveau de division k a pour longueur l_k, pour rayon r_k et pour chute de pression Δp_k *(Figure 4)*. On définit le débit dans une artère comme le produit entre l'aire d'une section de l'artère et la vitesse moyenne sur la section, c'est-à-dire $D_k = \pi r_k^2 \overline{u}_k$.

3. Déterminer le nombre total N_k d'artères dans la génération k ?
4. Ecrire schématiquement la loi de conservation du flux ?

   On introduit les facteurs d'échelle $\beta_k = r_{k+1}/r_k$ et $\gamma_k = l_{k+1}/l_k$. On va considérer dans la suite que ces facteurs d'échelle ne dépendent pas de k, c'est-à-dire $\beta_k = \beta$, $\gamma_k = \gamma$ et $n_k = n$.

5. Comment β varie en fonction de n ?

   Par des considérations qu'on ne détaillera pas ici, on peut déterminer la variation de γ en fonction de n, $\gamma = n^{-1/3}$.
   On essayera par la suite de déterminer par une autre méthode la variation de β, et γ en fonction de n.

6. Ecrire le volume total du réseau (le volume de sang) V_b en fonction de n, β, γ, N et V_0. N est le nombre de générations total et V_0 le volume de l'aorte. Simplifier cette relation dans le cas $n\gamma\beta^2 < 1$ et $N >> 1$, c'est cette relation qui sera retenue pour la suite.

   On considère que l'écoulement dans le système est laminaire, pour un tel écoulement la résistance hydrodynamique d'une artère est donnée par la loi de Poiseuille $R^h{}_k = 8\mu l_k / \pi r_k^4$, où μ est la viscosité dynamique du fluide.

7. Déterminer la résistance du réseau entier en fonction de n, β, γ, N et la résistance totale de l'aorte $R^h{}_0$. Simplifier cette relation dans le cas où $\gamma/n\beta^4 < 1$, et $N >> 1$.
8. Par analogie avec la loi d'Ohm déterminer la dépense cardiaque Wc, c'est-à-dire la puissance fournie par le cœur pour vaincre les forces visqueuses.

   Si on examine le système circulatoire, gardant à l'esprit l'idée d'économie, on se convainc facilement qu'il y a deux facteurs principaux antagonistes.
   Si l'artère est trop petite, le travail nécessaire pour faire couler le sang sera trop important (comme décrit par la loi de Poiseuille), en revanche si le volume du vaisseau est trop grand, le volume du sang qui lui est équivalent sera un fardeau pour le corps tout entier. Donc pour déterminer la situation la plus avantageuse pour l'être on se propose de minimiser la fonction $F(n) = W_c + b.V_b$, avec b une constante dimensionnelle.

9. Déterminer la variation de β et γ en fonction de *n*. Comparer avec les résultants obtenus précédemment.

   On s'intéresse maintenant à la distribution de la pression le long de l'arbre artériel.
   On a vu précédemment que lorsque l'on considère toutes les artères d'une génération donnée, on peut se ramener à considérer juste une artère équivalente. Par conséquent, l'réseau artériel entier sera équivalent à un circuit d'artères en série. Dans la suite on va considérer que les artères ont toutes la même épaisseur d et le même module de Young *E*.
   Rappel : Le module d'Young est définit comme une pression et il reflète les propriétés élastiques du matériau.

10. Déterminer une relation entre la pression moyenne dans une artère *P*, et *E, d* et le rayon *r* de l'artère.
    On considère que la pression qui règne à l'extérieur du vaisseau est nulle.
11. En utilisant la loi de Poiseuille, déterminer la loi qui détermine la décroissance de la pression moyenne dans l'arbre artériel en fonction de la longueur.
12. Il se trouve que cette loi donne une assez bonne approximation pour la pression en fonction de la longueur, mais elle n'est pas du tout admise pour donner une relation entre la pression et le flux. Avez-vous une idée pourquoi ?

- FIN -